Opravný zápočtový test z MA2 **31. 5. 2017**

1. Určete tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x,y) = \sqrt{4x^2+y^2} - xy$$

v bodech $A = (2,3,?)$ a $B = (2,-3,?)$. Ve kterém z těchto bodů je tečná rovina strmější (tj. svírá větší úhel se základnou)?

Řešení:
Normálový vektor tečných rovin v jednotlivých bodech je

$$\vec{n}_A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)_{|(x,y)=(2,3)} = \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2+y^2}} - y, \frac{y}{\sqrt{4x^2+y^2}} - x, -1\right)_{|(x,y)=(2,3)} = \left(-\frac{7}{5}, -\frac{7}{5}, -1\right)$$

$$\vec{n}_B = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)_{|(x,y)=(2,-3)} = \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2+y^2}} - y, \frac{y}{\sqrt{4x^2+y^2}} - x, -1\right)_{|(x,y)=(2,-3)} = \left(\frac{23}{5}, -\frac{13}{5}, -1\right)$$

Tečné roviny jsou tedy postupně

$$\text{v bodě } A: \quad -\frac{7}{5}(x-2) - \frac{7}{5}(y-3) - (z+1) = 0$$

$$\text{v bodě } B: \quad \frac{23}{5}(x-2) - \frac{13}{5}(y+3) - (z-11) = 0$$

neboli

$$\text{v bodě } A: \quad 7x + 7y + 5z = 30$$

$$\text{v bodě } B: \quad 23x - 13y - 5z = 30\ .$$

Úhel tečné roviny je rostoucí funkcí velikosti gradientu, ten je zřejmě větší v bodě B, takže tečná rovina je strmější v bodě B.

2. Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x,y) = 3xy$ na množině

$$M: \quad x^2 + y^2 \le 2.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:
Množina M je kruh o poloměru 2. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 + y^2 < 2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 = 2\ .$$

Extrém na M°:

$$f' = \big(3y,\ 3x\big) = (0,0)$$

nastává právě když $(x,y) = (0,0)$. Máme tak podezřelý bod $(x,y) = (0,0)$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x, y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(3y,\ 3x\big) = f'(a) = \lambda \Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Ani jedna z proměnných nemůže být nulová, takže máme $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}\lambda = \frac{y}{x}$, tedy $x^2 = y^2$. Dosazením do rovnice kružnice dostaneme kandidáty na extrémy:

$$\pm(1, -1), \quad \pm(1, 1),$$

s odpovídajícími hodnotami

$$f\big(-1, 1\big) = f\big(1, -1\big) = -3, \quad f\big(1, 1\big) = f\big(-1, -1\big) = 3.$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na M nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\pm(1, 1)$ a minima v bodech $\pm(1, -1)$.

3. Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál

$$\iint_E \frac{y^2 x}{x^2 + y^2}\ dS,$$

kde

$$E: \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \ \ \& \ \ x \le 0$$

Oblast E načrtněte.

Řešení:

Oblast E polovina mezikruží. Použijeme proto polární souřadnice

$$\Phi : x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

a oblast parametrizujeme množinou

$$U: \quad 1 \le r \le 2 \quad \& \quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi\ .$$

Pak máme

$$\iint_{E=\Phi(U)} x^2 y\ dS = \iint_U \frac{1}{r^2}(r^2\sin^2\varphi)\cdot(r\cos\varphi)\cdot r\ dr\ d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_1^2 r^2\sin^2\varphi\cos\varphi\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int_1^2 r^2\ dr\right)\cdot\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi\ d\varphi\right) = \frac{2^3 - 1^3}{3}\cdot\Big[\frac{\sin^3\varphi}{3}\Big]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{3\pi}{2}} = \frac{7}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{9}\ .$$